

- 28 太郎さんと花子さんは、数列の漸化式に関する問題 A、問題 B について話している。
2 人の会話を読んで、下の問いに答えよ。

(1)

問題 A 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=8, a_{n+1}=4a_n-9 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

花子: k を定数として, $a_{n+1}=4a_n-9$ を $a_{n+1}-k=4(a_n-k)$ の形に変形するといいいんだよね。

太郎: そうだね。そうすると公比が 4 の等比数列に結びつけられるね。

$k=\overset{3}{\text{ア}}$ である。また、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\overset{5}{\text{イ}} \cdot \overset{4}{\text{ウ}}^{n-1} + \overset{3}{\text{エ}}$ である。

(2)

問題 B 次のように定められた数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$b_1=4, b_{n+1}=4b_n-9n+6 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

花子: 求め方の方針が立たないよ。

太郎: そういうときは, $n=1, 2, 3$ を代入して具体的な数列の様子をみてみよう。

花子: $b_2=13, b_3=40, b_4=139$ となったけど……。

太郎: 階差数列を考えてみたらどうかな。

数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{p_n\}$ を, $p_n=b_{n+1}-b_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) と定める。

$p_1=\overset{9}{\text{オ}}, p_{n+1}=\overset{4}{\text{カ}} p_n - \overset{3}{\text{キ}}$ であるから、数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$p_n=\overset{3}{\text{ク}} \cdot \overset{2}{\text{ケ}}^{2n-1} + \overset{3}{\text{コ}}$ である。

- (3) 2 人は問題 B について引き続き会話をしている。

花子: 問題 A の式変形のことを問題 B に応用できないかな。

太郎: 問題 B の漸化式 $b_{n+1}=4b_n-9n+6$ を, 定数 s, t を用いて

$$\overset{3}{\text{サ}} = 4(\overset{0}{\text{シ}}) \text{ の式に変形してはどうか。}$$

- (i) $q_n=\overset{3}{\text{シ}}$ とおくと、太郎さんの変形により数列 $\{q_n\}$ が公比 4 の等比数列とわかる。

このとき、 $\overset{3}{\text{サ}}, \overset{0}{\text{シ}}$ に当てはまる式を、次の ①～④ のうちから 1 つずつ選べ。

ただし、同じものを選んでもよい。

① $b_n+s n+t$ ② $b_{n+1}+s n+t$ ③ $b_n+s(n+1)+t$ ④ $b_{n+1}+s(n+1)+t$

- (ii) $s=\overset{-3}{\text{スセ}}, t=\overset{1}{\text{ソ}}$ である。

- (4) 問題 B の数列は、(2) の方法でも (3) の方法でも一般項を求めることができる。

数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\overset{2}{\text{タ}}^{2n-1} + \overset{3}{\text{チ}} n - \overset{1}{\text{ツ}}$ である。

- (5) 次のように定められた数列 $\{c_n\}$ がある。

$$c_1=5, c_{n+1}=2c_n-3n^2+5n+6 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=\overset{3}{\text{テ}} \cdot \overset{2}{\text{ト}}^{n-1} + \overset{3}{\text{ナ}} n^2 + n - \overset{2}{\text{ニ}}$ である。

- 解答** (ア) 3 (イ) 5 (ウ) 4 (エ) 3 (オ) 9 (カ) 4 (キ) 9
(ク) 3 (ケ) 2 (コ) 3 (サ) ③ (シ) ④ (スセ) -3 (ソ) 1
(タ) 2 (チ) 3 (ツ) 1 (テ) 3 (ト) 2 (ナ) 3 (ニ) 2

$$(1) a_1 = 8.$$

$$a_{n+1} = 4a_n - 9$$

$$\rightarrow a = 4a - 9$$

$$9 = 3a \\ a = 3$$

$$a_{n+1} - a = 4(a_n - a)$$

$$a_{n+1} - 3 = 4(a_n - 3)$$

$$\text{Cnvc. } b_n = 3$$

$$C_1 = a_1 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$C_n = 5 \cdot 4^{n-1} \text{ v. d. z.}$$

$$a_n - 3 = 5 \cdot 4^{n-1}$$

$$a_n = 5 \cdot 4^{n-1} + 3$$

$$(2) b_1 = 4.$$

$$b_{n+1} = 4b_n - 9n + 6$$

$$p_n = b_{n+1} - b_n \text{ v. d. z.}$$

$$p_1 = b_2 - b_1 = 13 - 4 = 9$$

$$\rightarrow p_{n+1} = b_{n+2} - b_{n+1}$$

$$b_{n+2} = 4b_{n+1} - 9(n+1) + 6$$

$$b_{n+2} = 4b_{n+1} - 9n - 3$$

$$\rightarrow p_{n+1} = b_{n+2} - b_{n+1}$$

$$= 4b_{n+1} - 9n - 3$$

$$- 4b_n + 9n - 6$$

$$= 4(b_{n+1} - b_n) - 9 \\ p_n$$

$$p_{n+1} = 4p_n - 9$$

$$\rightarrow p = 4p - 9 \quad 9 = 3p \quad p = 3$$

$$p_{n+1} - p = 4(p_n - p)$$

$$p_{n+1} - 3 = 4(p_n - 3)$$

$$p_n \text{ v. d. z.}$$

$$p_1 = p_1 - 3 = 9 - 3 = 6$$

$$p_n = 6 \cdot 4^{n-1}$$

$$p_n - 3 = 6 \cdot 4^{n-1}$$

$$p_n = 6 \cdot 4^{n-1} + 3$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot (2^2)^{n-1} + 3$$

$$= 3 \cdot 2^{2n-2} \cdot 2^{+1} + 3$$

$$p_n = 3 \cdot 2^{2n-1} + 3$$

$$(3) \quad a_{n+1} = 4a_n - 9$$

$$b_{n+1} = 4b_n - 9n + 6$$

「 a が5より大きい」 - 選択肢の中が5.

5より大きい代わりになる.

つまりは b_n .

つまりは b_{n+1} (つまりは b_n)

$$\text{つまり} \quad \text{つまり} \\ \textcircled{1} \text{ or } \textcircled{3} = \textcircled{1} \text{ or } \textcircled{2}.$$

1つずつずつ.

= $\textcircled{2}$ だけ.

$$b_{n+1} + s(n+2) + t = 4(b_n + s(n+1) + t)$$

つまり
選択肢に1. $\frac{1}{4}$.

= $\textcircled{0}$ だけ.

$$b_{n+1} + s(n+1) + t = 4(b_n + s(n) + t)$$

$\textcircled{3}$ が正しいです.

2.

5. t の出し方.

↓ t の出し方

1つずつずつ.

(4). (2) の出し方.

$$P_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 3$$

$$P_n = 6 \cdot 4^{n-1} + 3 \quad 1 \text{ だけ}$$

階差法.

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k$$

$$\sum_{k=1}^n a \cdot r^{k-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (6 \cdot 4^{k-1} + 3)$$

$$= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 6 \cdot 4^{k-1} + 3 \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 4 + \frac{6(4^n - 1)}{4 - 1} + 3(n-1)$$

$$= 4 + 2 \cdot (4^{n-1} - 1) + 3n - 3$$

$$= 2 \cdot 2^{2n-1} - 2 + 3n - 3 + 4$$

↓

(3) 10757.

$$b_{n+1} = 4b_n - 9n + 6$$

$$b_{n+1} + s(n+1) + t = 4(b_n + s_n + t)$$

$$b_{n+1} + s_n + s + t = 4b_n + 4s_n + 4t$$

$$b_{n+1} = 4b_n + 4s_n + 4t - s_n - s - t$$

$$b_{n+1} = 4b_n + 3s_n + 3t - s$$

$$b_{n+1} = 4b_n - 9n + 6$$

2. 10757.

$$3s = -9$$

$$s = -3$$

$$3t - s = 6$$

$$3t + 3 = 6$$

$$3t = 3$$

$$t = 1$$

3.

$$b_n = 2 \cdot 2^{2n-2} + 3n - 1$$

$$= 2^{2n-1} + 3n - 1$$

2. 10757.

$$b_{n+1} + a(n+1) + b$$

$$b_n + ax + b$$

2. 10757.

恒等式をみたす

定数 a, b が決まる

10757

$$C_1 = 5.$$

$$C_{n+1} = 2C_n - 3n^2 + 5n + 6.$$

(5) (3)の式を代入する。

$$g_n = C_n + s n^2 + t n + u \quad \text{と仮定}$$

$\times$ $n^2, n, 1$ の係数を s, t, u とする

$$g_{n+1} = 2g_n \quad \text{「仮定は正しい」}$$

$$C_{n+1} + s(n+1)^2 + t(n+1) + u = 2(C_n + s n^2 + t n + u)$$

$$s(n^2 + 2n + 1)$$

$$C_{n+1} = 2C_n + 2s n^2 + 2t n + 2u$$

$$\begin{array}{r} -s n^2 \quad -t n \quad -u \\ -2s n \quad -t \\ -s \end{array}$$

$$C_{n+1} = 2C_n + s n^2 + (t - 2s)n$$

$$u - t - s$$

$$C_{n+1} = 2C_n - 3n^2 + 5n + 6$$

$$s = -3, \quad t - 2s = 5$$

$$u - t - s = 6$$

$$\text{すなわち}$$

$$s = -3, \quad t = -1, \quad u = 2$$

4.

$$g_n = C_n - 3n^2 - n + 2$$

と表す

$$g_1 = C_1 - 3 - 1 + 2$$

$$= 5 - 3 - 1 + 2$$

$$= 3$$

$$g_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$3 \cdot 2^{n-1} = C_n - 3n^2 - n + 2$$

$$C_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 3n^2 + n - 2$$

2"t

すなわち...