

重要 例題 160 三角関数に関する領域の図示



次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$|x| \leq \pi, |y| \leq \pi, \sin(x+y) - \sqrt{3} \cos(x+y) \geq 1$$

[弘前大]

基本 115, 155

指針▷ 三角不等式を解く要領で進める。

$\sin(x+y) - \sqrt{3} \cos(x+y) \geq 1$ を角 $x+y$ に関する三角不等式とみると

① $\sin$ と $\cos$ の和 同周期なら合成 の方針で解くことができる。

→ 得られる x, y の 1 次不等式が表す領域を図示する。

解 答

$$|x| \leq \pi \text{ から } -\pi \leq x \leq \pi \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$|y| \leq \pi \text{ から } -\pi \leq y \leq \pi \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また, $\sin(x+y) - \sqrt{3} \cos(x+y) \geq 1$ から

$$2 \sin\left(x+y - \frac{\pi}{3}\right) \geq 1$$

$$\text{ゆえに } \sin\left(x+y - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ から } -2\pi \leq x+y \leq 2\pi$$

$$\text{よって } -2\pi - \frac{\pi}{3} \leq x+y - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\text{すなわち } -\frac{7}{3}\pi \leq x+y - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{3}\pi$$

この範囲で不等式 ③ を解くと

$$-\frac{11}{6}\pi \leq x+y - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{7}{6}\pi$$

$$\text{または } \frac{\pi}{6} \leq x+y - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi$$

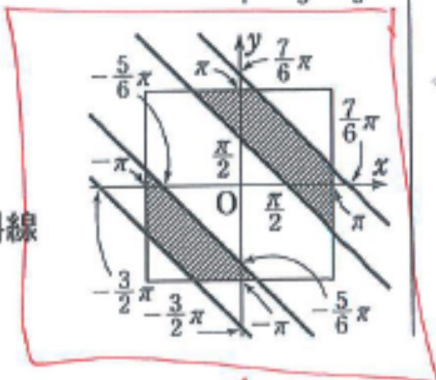
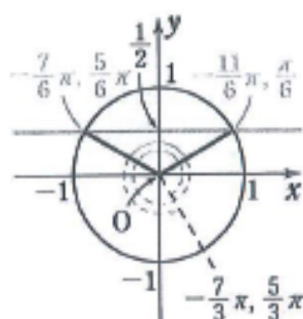
したがって

$$-\frac{3}{2}\pi \leq x+y \leq -\frac{5}{6}\pi$$

$$\text{または } \frac{\pi}{2} \leq x+y \leq \frac{7}{6}\pi$$

ゆえに, 求める領域は 右の図の斜線部分 である。

ただし, 境界線を含む。



↑
160

◀ ①, ② の表す領域は, 4 点 $(\pi, \pi), (\pi, -\pi), (-\pi, \pi), (-\pi, -\pi)$ を結んでできる正方形の周および内部。

◀ 三角関数の合成。

◀ $x+y - \frac{\pi}{3}$ のとりうる値の範囲を求める。

◀ $x+y - \frac{\pi}{3} = \theta$ とおくと, ③

$$\text{は } \sin \theta \geq \frac{1}{2}$$

これを $-\frac{7}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$ の範囲で解く。

$$\leftarrow -\frac{3}{2}\pi \leq x+y \leq -\frac{5}{6}\pi \text{ か}$$

$$\text{ら } y \geq -x - \frac{3}{2}\pi \text{ かつ}$$

$$y \leq -x - \frac{5}{6}\pi$$

160.

$$|x| \leq \pi, |y| \leq \pi.$$

1,

$$\sin(x+y) - \sqrt{3} \cos(x+y) \geq 1$$

$t \in \mathbb{R}$.

$$x+y = t \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

$$- \pi \leq y \leq \pi.$$

$$-2\pi \leq x+y \leq 2\pi.$$

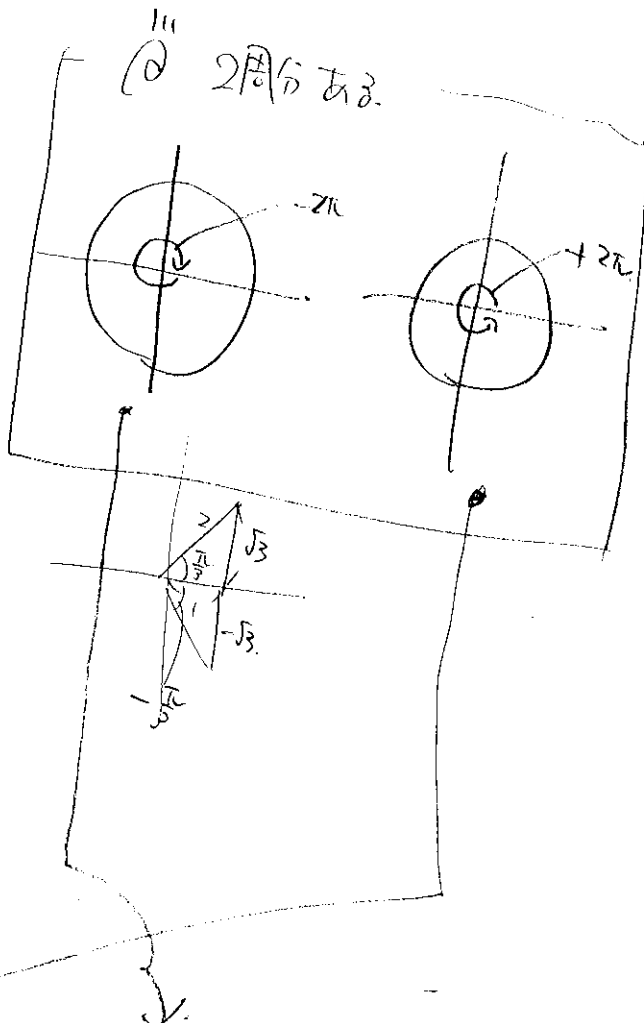
$$-2\pi \leq t \leq 2\pi.$$

$$\sin t - \sqrt{3} \cos t \geq 1.$$

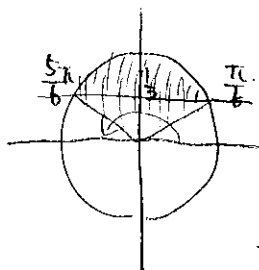
$$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sin(t - \frac{\pi}{3}) \geq 1.$$

$$2 \sin(t - \frac{\pi}{3}) \geq 1$$

$$\sin(t - \frac{\pi}{3}) \geq \frac{1}{2}$$



i) t が正のとき.



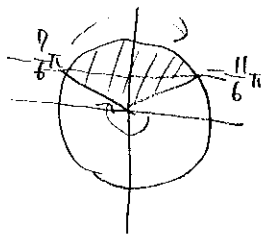
$$\frac{\pi}{6} \leq t - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1+2}{6} \pi \leq t \leq \frac{3+2}{6} \pi$$

$$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{7}{6} \pi.$$

ii) t が負のとき.



$$-\frac{11}{6} \pi \leq t - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{7}{6} \pi$$

$$-\frac{11}{6} \pi + \frac{\pi}{3} \leq t \leq -\frac{7}{6} \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{-11+2}{6} \pi \leq t \leq \frac{-7+2}{6} \pi$$

$$-\frac{9}{6} \pi \leq t \leq -\frac{5}{6} \pi.$$

$$-\frac{3}{2} \pi \leq t \leq -\frac{5}{6} \pi$$

i) t が正の時

$$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{7}{6}\pi$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x+y \leq \frac{7}{6}\pi$$

① 二つの 1 次関数の不等式に分ける!!

$$\frac{\pi}{2} \leq x+y$$

$$x+y \leq \frac{7}{6}\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x \leq y$$

$$y \leq -x + \frac{7}{6}\pi$$

$$y \geq -x + \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{+}$$

ii) t が負の時

$$-\frac{3}{2}\pi \leq t \leq -\frac{5}{6}\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi \leq x+y \leq -\frac{5}{6}\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi \leq x+y$$

$$x+y \leq -\frac{5}{6}\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - x \leq y$$

$$y \leq -x - \frac{5}{6}\pi$$

$$y \geq -x - \frac{3}{2}\pi$$

$$\textcircled{+}$$

