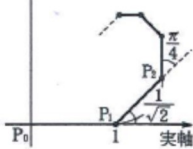


図のように、複素数平面上の原点を P_0 とし、虚軸 P_0 から実軸の正の方向に 1 進んだ点を P_1 とする。次に、点 P_1 を $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して向きを変えて、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を P_2 とする。以下同様に、 P_n に到達した後、 $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して前回進んだ距離の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 進んで到達する点を P_{n+1} とする。このとき、点 P_{10} が表す複素数を求めよ。



(日本女子大)

考え方

$\overrightarrow{P_0P_{10}} = \overrightarrow{OP_{10}} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \dots + \overrightarrow{P_9P_{10}}$ となる。
また、 $\overrightarrow{P_kP_{k+1}} = \overrightarrow{OP_{k+1}} - \overrightarrow{OP_k}$ となるベクトル $\overrightarrow{OP_{k+1}}$ を考えれば、
 $\overrightarrow{P_{k+1}P_{k+2}} = \overrightarrow{OP_{k+2}} - \overrightarrow{OP_{k+1}}$ は $\overrightarrow{OP_{k+1}}$ を原点 O のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍したベクトルである。

解

与えられた図において、
 $\overrightarrow{P_0P_{10}} = \overrightarrow{OP_{10}} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \dots + \overrightarrow{P_9P_{10}}$
点 P_0 は原点 O と一致しているので、
 $\overrightarrow{P_0P_{10}} = \overrightarrow{OP_{10}} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \dots + \overrightarrow{P_9P_{10}}$
次に、 $\overrightarrow{P_kP_{k+1}} = \overrightarrow{OP_{k+1}} - \overrightarrow{OP_k}$ となるベクトル $\overrightarrow{OP_{k+1}}$ を考えると、
 $\overrightarrow{OP_{10}} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \dots + \overrightarrow{OP_9} + \overrightarrow{OP_{10}}$
ここで、点 P_{10} を表す複素数を z_{10} とし、点 P_n を表す複素数を z_n とすると、

$$z_{10} = z_1' + z_2' + z_3' + \dots + z_9' + z_{10}'$$

また、 $\overrightarrow{OP_{k+2}}$ は $\overrightarrow{OP_{k+1}}$ を原点 O のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍したベクトルである。

$$\text{したがって、} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ とおくと、}$$

$z_{k+1}' = \alpha z_k'$ となるので、

$$\begin{aligned} z_k' &= \alpha z_{k-1}' \\ &= \alpha (\alpha z_{k-2}') \\ &= \alpha^2 (\alpha z_{k-3}') \\ &\vdots \\ &= \alpha^{k-1} z_1' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{より、} z_{10} &= z_1' + \alpha z_1' + \alpha^2 z_1' + \dots + \alpha^9 z_1' \\ &= z_1' (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^9) \\ &= \frac{z_1' (1 - \alpha^{10})}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1}$ であるが、ここではそのままにしておく。

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ は、原点 O のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍する複素数を表す。

初項 z_1' 、公比 α ($\alpha \neq 1$)、項数 10 の等比数列の和

$$z_1' = 1 \text{ より、} z_{10} = \frac{1 - \alpha^{10}}{1 - \alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \alpha^{10} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{10} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{10} \\ &= \frac{1}{32} \left(\cos \frac{5}{2}\pi + i \sin \frac{5}{2}\pi \right) = \frac{1}{32} (0 + i) = \frac{1}{32} i \end{aligned}$$

よって、点 P_{10} を表す複素数 z_{10} は、

$$\begin{aligned} z_{10} &= \frac{1 - \frac{1}{32} i}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)} = \frac{1 - \frac{1}{32} i}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i} \\ &= \frac{32 - i}{32} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} \\ &= \frac{32 - i}{16(1 - i)} \\ &= \frac{(32 - i)(1 + i)}{16(1 - i)(1 + i)} \\ &= \frac{33 + 31i}{32} \end{aligned}$$

原点 O のまわりに θ だけ回転して r 倍する複素数を $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。このとき、 $\alpha^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

複素数平面

Focus

ド・モアブルの定理

n が整数のとき、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

この例題では、

$$z_1' + z_1' \alpha + z_1' \alpha^2 + \dots + z_1' \alpha^9 = \frac{z_1' (1 - \alpha^{10})}{1 - \alpha}$$

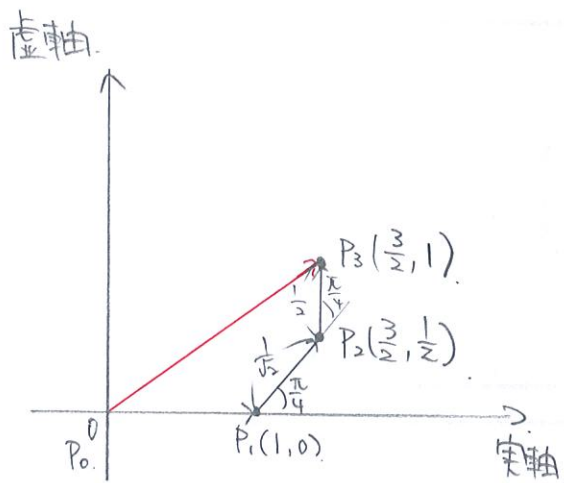
と等比数列の和の公式を用いた。

等比数列の和の公式を導く原理を考えれば、初項や公比が実数でも虚数でも成り立つことはわかるであろう。

では、丁寧に $\overrightarrow{P_kP_{k+1}} = \overrightarrow{OP_{k+1}} - \overrightarrow{OP_k}$ とおき換え、 O を始点とするベクトルで考えたが、これをいきなり、
 $\overrightarrow{OP_{10}} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \dots + \overrightarrow{P_9P_{10}}$
 $= 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^9$
と表してもよい。

練習

i)



$$\begin{aligned} P_{2\text{実}} &\rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2\text{虚}} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{3\text{虚}} &\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

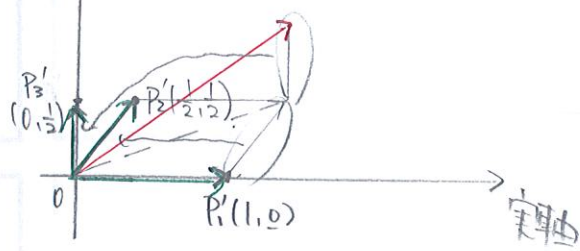
$$\vec{P_0 P_3} = \vec{OP_3} = \vec{P_0 P_1} + \vec{P_1 P_2} + \vec{P_2 P_3}$$

と表せるが

これを原点へ平行移動して
足しあわせて同じ
結果が得られる。

虚軸

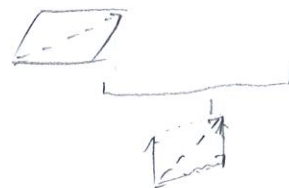
ii)



$$\vec{P_2 P_{2+1}} = (\vec{OP_{2+1}})' \text{ となる. } (\vec{OP_{2+1}})' \text{ へ注意}$$

(7.12) の $\rightarrow$ の $\frac{1}{2}$ 部分.

$$\vec{P_0 P_3} = \vec{OP'_1} + \vec{OP'_2} + \vec{OP'_3}$$



ほらね。

ここで原点からのびる。

このわけのわからぬ OP'_1 や OP'_2 を

え' とおく

(e' の ') ダッシュは。

決して共役なわけでは
ない。似たものを表す
' である。



3.

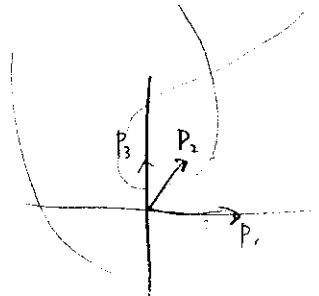
↓

ちなみに 別解の.

$$\vec{OP_0} = \vec{P_0P_1} + \vec{P_1P_2} + \vec{P_2P_3} \dots$$

$$= 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ = \vec{OP_1} & + \vec{OP_2} & + \vec{OP_3} \end{matrix}$$



各項は、
原点からの位置ベクトルを表してる!!