

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 18 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

複素数平面上に 3 点 $P(z)$, $A(1)$, $B(-1)$ があり,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおく。ただし, i は虚数単位を表す。

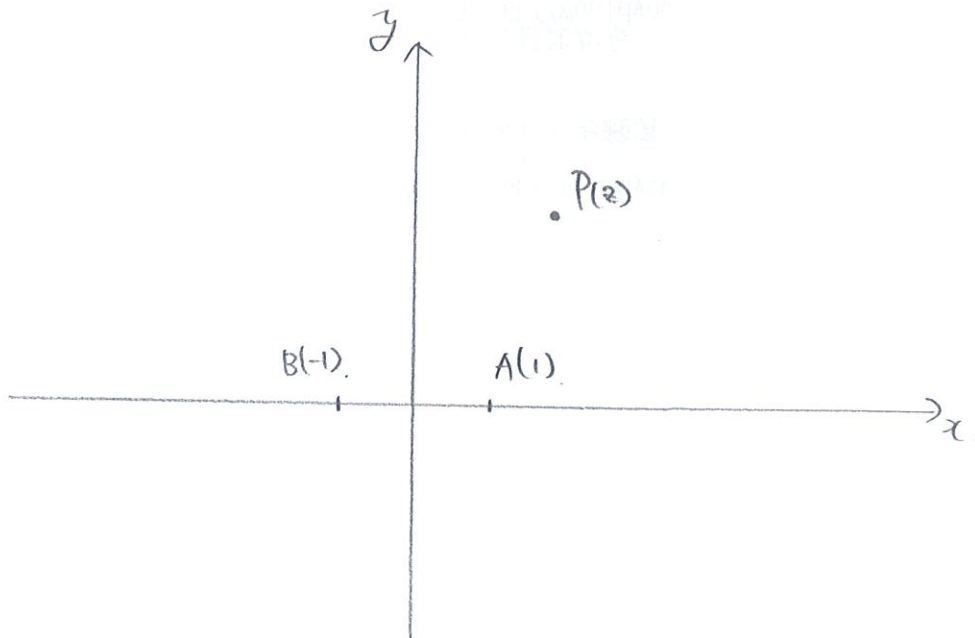
(1) $z^2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ のとき, r , θ の値を求めよ。

以下では, z はつねに $|z^2 - 1| = 1$ の関係を満たすものとする。

(2) r^2 を θ を用いて表せ。

(3) 三角形 PAB の面積の最大値を求め, 最大となるときの z のうち, z の実部と虚部がともに正となるものを求めよ。さらに, このとき, $\angle APB$ の大きさを求めよ。

ただし, P が直線 AB 上にあるときは三角形 PAB の面積を 0 とする。



$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

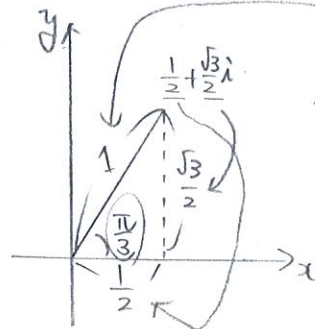
(1). $Z^2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ のとき、 r と θ を求めよ。

$$\begin{aligned} Z^2 &= r^2(\cos \theta + i \sin \theta)^2. && \text{教P18.} \\ &= r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta). && \text{ド・モアヴールの定理より.} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ を極形式で表す 教P13.

また原点からの距離を求めよ。 教P8

$$\left| \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$



座標から $\theta = \frac{\pi}{3}$ が求められる。

よって

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = 1 \times \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right). \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②が等しいので

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 1 \times (\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3})$$

$$r^2 = 1$$

$r > 0$ より

$$\underline{r = 1}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より}$$

$$\underline{\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}}$$



(2). $|z^2 - 1| = 1$... ③ を満たすとき.

r^2 と θ を用いて表す.

①と③に代入する

$$|r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) - 1| = 1$$

$$|r^2\cos 2\theta + i r^2\sin 2\theta - 1| = 1$$

$$|\underline{r^2\cos 2\theta - 1} + i \underline{r^2\sin 2\theta}| = 1$$

$$|(r^2\cos 2\theta - 1) + (r^2\sin 2\theta)i| = 1$$

公式 $|a+bi|^2 = a^2+b^2$ より

$$(r^2\cos 2\theta - 1)^2 + (r^2\sin 2\theta)^2 = 1$$

$$\underline{r^4\cos^2 2\theta} - 2r^2\cos 2\theta + 1 + \underline{r^4\sin^2 2\theta} = 1$$

$$r^4(\cancel{\sin^2 2\theta} + \cancel{\cos^2 2\theta}) - 2r^2\cos 2\theta = 0$$

$$r^4 - 2r^2\cos 2\theta = 0$$

$$r^2(r^2 - 2\cos 2\theta) = 0$$

$r > 0$ であるから $r^2 \neq 0$

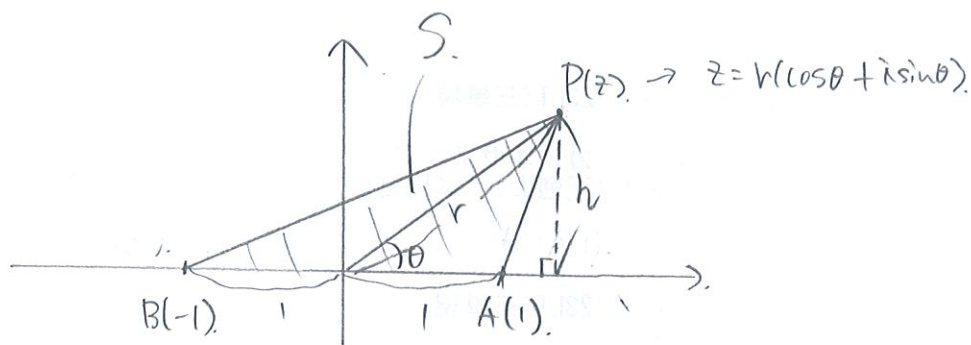
$$r^2 - 2\cos 2\theta = 0$$

↓

$$\underline{r^2 = 2\cos 2\theta}$$

(3)

4



$$|z^2 - 1| = 1 \quad \text{--- ③ を満たすとき}$$

$$(2) \text{ 対し } r^2 = 2 \cos 2\theta \quad \text{--- ④}$$

Pから直線ABに垂線を下ろし、その長さをhとする。

$$h = |r \sin \theta| \quad \text{となる。} \quad \text{--- ④}$$

三角形PABの面積をSとする。

$$S = \frac{2 \times |r \sin \theta| \times \frac{1}{2}}{\text{底辺} \quad \text{高さ}}$$

$$= |r \sin \theta|$$

絶対値を外すため、また、SとS²が最大値をとるときは同条件から

$$S^2 = |r \sin \theta|^2$$

$$= r^2 \sin^2 \theta$$

$$r^2 = 2 \cos 2\theta \quad \text{--- ④}$$

$$= 2 \cos 2\theta \sin^2 \theta$$

$$= 2 \cos 2\theta \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$= \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta)$$

教I P129.
倍角の公式より

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta - 1 = -2 \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$S^2 = \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta)$$

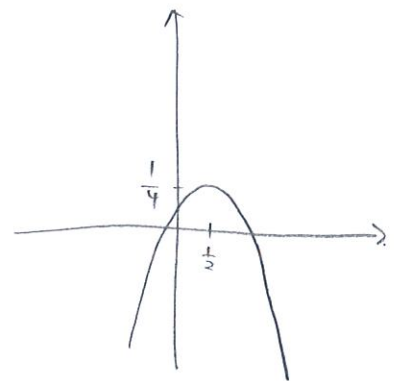
$$= -\cos^2 2\theta + \cos 2\theta$$

$$= -(\cos^2 2\theta - \cos 2\theta)$$

$$= -\left\{\left(\cos 2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$= -\left(\cos 2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} x^2 - x \\ = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$



ゆえに、

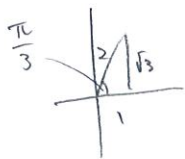
$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ のとき S^2 は最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

z の実部と虚部 がともに正であるときは $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ となる $\rightarrow 0 < 2\theta < \pi$ のとき

$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ のとき $2\theta = \frac{\pi}{3}$ のみ。

$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、 S の最大値は $\frac{1}{2}$ となる。



また、④より $r^2 = 2\cos 2\theta$

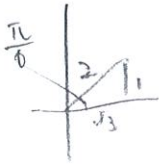
$$= 2\cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 1 \quad r > 0 \text{ より } r = 1$$



このときの z は.

$$r=1, \theta=\frac{\pi}{6} \text{ であり}$$



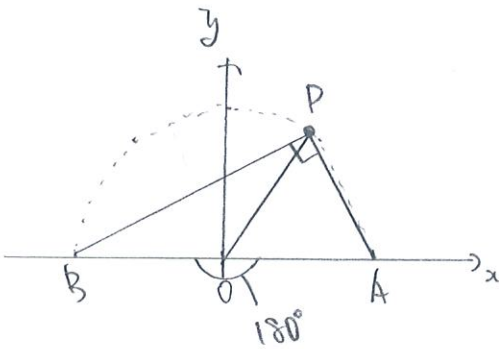
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$= 1 \times \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \times \sin\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$$= \frac{\sqrt{3} + i}{2} //$$

$\angle APB$ は. $r=1$ であり



$OP = OA = OB = 1$ であり

P は円周上にあり

ゆえに円周角の定理より

$$\angle APB = 180^\circ \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} //$$

この推移図によって、 a_{n+1} を a_n で表すと次のような漸化式が得られる。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \times \frac{13}{16} + (1 - a_n) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{16} a_n + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

この漸化式は、

$$a_{n+1} - \frac{4}{7} = \frac{9}{16} \left(a_n - \frac{4}{7} \right)$$

と変形することができ、(2)より、 $a_1 = \frac{17}{32}$ であるから、

$$\begin{aligned} a_n &= \left(a_1 - \frac{4}{7} \right) \left(\frac{9}{16} \right)^{n-1} + \frac{4}{7} \\ &= -\frac{1}{14} \left(\frac{9}{16} \right)^{n-1} + \frac{4}{7} \end{aligned}$$

を得る。たとえば、 $n=3$ とすると、

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{14} \left(\frac{9}{16} \right)^2 + \frac{4}{7} \\ &= \frac{4577}{8192} \end{aligned}$$

となり、これが(4)における【操作2】を3回行ったあとA君が[K]をもっている確率である。

[4]

複素数平面上に3点 $P(z)$, $A(1)$, $B(-1)$ があり、

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおく。ただし、 i は虚数単位を表す。

(1) $z^2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき、 r , θ の値を求めよ。

以下では、 z はつねに $|z^2 - 1| = 1$ の関係を満たすものとする。

(2) r^2 を θ を用いて表せ。

(3) 三角形PABの面積の最大値を求め、最大となるときの z のうち、 z の実部と虚部がともに正となるものを求めよ。さらに、このとき、 $\angle APB$ の大きさを求めよ。

ただし、Pが直線AB上にあるときは三角形PABの面積を0とする。

【解答】

(1) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ より、

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta). \quad \dots ①$$

また、

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}. \quad \dots ②$$

①、②が等しいので、

$$r^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数}).$$

$r > 0$ かつ $0 \leq 2\theta < 4\pi$ から、

$$r = 1, \quad 2\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{7}{3}\pi.$$

よって、

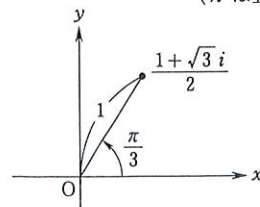
$$r = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{7}{6}\pi. \quad \dots (\text{答})$$

(2) $|z^2 - 1| = 1. \quad \dots ③$

ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n \text{ は整数})$$

図



図

$$z = \pm \frac{\sqrt{3} + i}{2}.$$

①を③

$r \neq 0$

(3) 頂点P

であるか

よって

ゆえに

z の実

$0 < 2\theta <$

である。

以上、

であり、

さら

はAB

【解説】

(1) $z^2 =$

これ

一

①を③に代入して、

$$\begin{aligned} |(r^2 \cos 2\theta - 1) + (r^2 \sin 2\theta)i| &= 1. \\ (r^2 \cos 2\theta - 1)^2 + (r^2 \sin 2\theta)^2 &= 1. \\ r^4 - 2r^2 \cos 2\theta &= 0. \end{aligned}$$

$r \neq 0$ より、

$$r^2 = 2 \cos 2\theta. \quad \dots(\text{答})$$

(3) 頂点 P から、直線 AB におろした垂線の長さを h とすると、

$$h = |r \sin \theta|$$

であるから、三角形 PAB の面積を S とすると、

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot h = h = |r \sin \theta|.$$

よって、

$$\begin{aligned} S^2 &= |r \sin \theta|^2 = r^2 \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos 2\theta \sin^2 \theta \\ &= \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta) \\ &= -\left(\cos 2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

ゆえに、 $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ のとき、 S^2 は最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

z の実部と虚部がともに正となると、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、

$0 < 2\theta < \pi$ であるから、 $2\theta = \frac{\pi}{3}$ 、すなわち、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ となり、 $r = 1$

である。

以上より、三角形 PAB の面積 S の最大値は、

$$\frac{1}{2} \quad \dots(\text{答})$$

であり、このとき、

$$z = \frac{\sqrt{3} + i}{2}. \quad \dots(\text{答})$$

さらに、O を原点とすれば、 $OA = OB = OP = 1$ であるから、P は AB を直径とする円周上にあるので、

$$\angle APB = \frac{\pi}{2}. \quad \dots(\text{答})$$

【解説】

(1) $z^2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ から z を求める問題であるが、このような問題では、極形式とド・モアブルの定理を利用する。

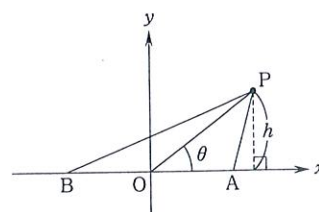
ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n \text{ は整数})$$

これから、 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のとき、 $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ となる。

一方、 $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ と表せるので、絶対値と偏角を比較すればよい。このとき、偏角について

$$|a + bi|^2 = a^2 + b^2.$$



(2) より、 $r^2 = 2 \cos 2\theta$.

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \text{ として、} \\ S &= 2(1 - 2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \\ &= -4 \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

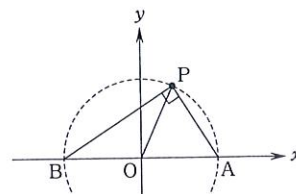
と変形する方法もある。

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 、 $r^2 = 2 \cos 2\theta$ より、 $r^2 = 1$ と

なり、 $r > 0$ より、

$$r = 1.$$

$$z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$



なるもの

$+ i \sin n\theta$
は整数)

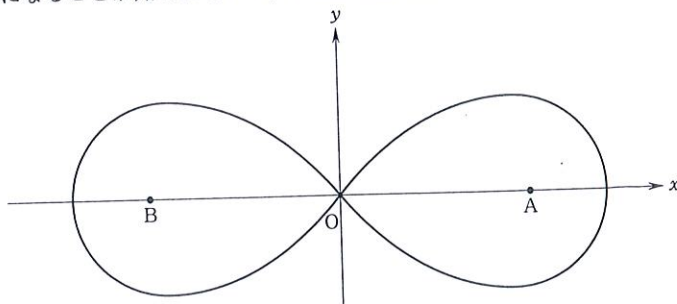
- x

は、 2π の整数倍の差も考えて計算する。

(2) $|z^2 - 1| = 1$ に $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ を代入して整理すれば、 r と θ の関係

$$r^2 = 2 \cos 2\theta$$

が得られる。これは点 P の軌跡を表す極座標表示と考えることができる。 $r=0$ のときも含めると、このグラフは、次の図のようになることが知られていて、この曲線はレムニスケートと呼ばれるものである。



$|z^2 - 1| = 1$ から、 $|z - 1||z + 1| = 1$ と変形することで、点 P は

$$AP \cdot BP = 1 \quad \dots (*)$$

の関係を満たすことがわかる。すなわち、この曲線は 2 定点 A, B からの距離の積が定数 1 であるような点の軌跡である。

(3) 三角形 PAB の面積は、 P から辺 AB への高さ $h = |r \sin \theta|$ によって定まる。

(2) で求めた関係式 $r^2 = 2 \cos 2\theta$ を用いて、

$$h^2 = r^2 \sin^2 \theta = 2 \cos 2\theta \sin^2 \theta = \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta)$$

のように、三角関数の公式を利用した変形をするとよい。

面積が最大となるのは、 $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ のときであり、 z の実部と虚部がともに正である条件から、 $2\theta = \frac{\pi}{3}$ 、 $r = 1$ となり z が定まる。このとき、 $OA = OB = OP = 1$ であるから、 P は AB を直径とする円周上にあつて、

$$\angle APB = \frac{\pi}{2} \text{ がわかる。}$$

このことについてはいろいろな視点から計算することができる。

((3) 後半のベクトルによる別解)

面積が最大となるとき点 P の xy 座標は $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。

これより、
$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{BP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \frac{1}{2}\right)$$

したがって、
$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \frac{1}{4} = 0$$

より、 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ となるので、
$$\angle APB = \frac{\pi}{2}.$$

((3) 後半のベクトルによる別解終り)

((3) 後半の複素数の偏角を考えた別解)

$z = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \frac{1}{2}i}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}i} = \frac{\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \frac{1}{2}i\right\} \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}i\right\}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{-i}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}} = (\text{純虚数}). \end{aligned}$$

これより、
$$\angle APB = \frac{\pi}{2}.$$

((3)*)

(*) の

した

このよ

$\angle A$

これ

であり

として

よっ

なる。

よっ

となり

〔5〕

p を

とする

(1) r

(2) r

(3) $\bar{1}$

【解答】

(1) 背

r_1

…、 r

と、

の p

なる、

よ

くと

(2) (1)

を満

((3)(*) の関係式 $AP \cdot BP = 1$ を用いた別解)

(*) の関係式 $AP \cdot BP = 1$ より, 三角形 PAB の面積は,

$$\frac{1}{2} AP \cdot BP \sin \angle APB = \frac{1}{2} \sin \angle APB.$$

したがって, $\sin \angle APB = 1$ となる場合が存在すれば, 面積の最大値は $\frac{1}{2}$, $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ といえる. そこで, このような点 $P(z)$ が存在することを確認する.

$\angle APB = \frac{\pi}{2}$ のとき, $\frac{z+1}{z-1}$ が純虚数となるので,

$$\frac{z+1}{z-1} + \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = 0.$$

これから,

$$\frac{z+1}{z-1} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = 0$$

であり,

$$(z+1)(\bar{z}-1) + (z-1)(\bar{z}+1) = 0$$

として整理すると,

$$z\bar{z} = 1 \quad \text{すなわち, } |z|^2 = 1.$$

よって, $r=1$ であり, (2) の結果より, $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ であるから, $2\theta = \frac{\pi}{3} \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, すなわち, $\theta = \frac{\pi}{6}$ となる.

よって, このとき, $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2} (\neq \pm 1)$ であるから, 条件を満たす点 P が存在し, その面積の最大値は $\frac{1}{2}$

となり, このとき, $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ である.

((3)(*) の関係式 $AP \cdot BP = 1$ を用いた別解終り)

[5]

p を素数とする. ただし, $p \neq 2, 5$ である. 正の整数 n に対して,

$10^n - 1$ を p で割ったときの商を q_n , 余りを r_n

とすると, 以下の問いに答えよ.

(1) $r_1, r_2, \dots, r_p, r_{p+1}$ のうち, 値が等しいものの組が少なくとも 1 組存在することを示せ.

(2) $r_n = 0$ となる正の整数 n が存在することを示せ.

(3) 正の整数 N が $r_N = 0$ を満たすとき, 無限級数 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_N}{(10^N)^m}$ の和を p を用いて表せ.

【解答】

(1) 背理法を用いて示す.

$r_1, r_2, \dots, r_p, r_{p+1}$ が相異なる値をとると仮定すると, $r_1, r_2,$

$\dots, r_p, r_{p+1}$ は $(p+1)$ 個の相異なる整数となる.

ところが, 正の整数を p で割ったときの余りは,

$$0, 1, 2, \dots, p-1$$

の p 個の整数のいずれかであるから, $r_1, r_2, \dots, r_p, r_{p+1}$ がとる異なる値の個数は p 以下となり, 不合理.

よって, $r_1, r_2, \dots, r_p, r_{p+1}$ のうち, 値が等しいものの組が少なくとも 1 組存在する.

(2) (1) より,

$$r_i = r_j \quad (1 \leq i < j \leq p+1)$$

を満たす整数 i, j の組が存在する. この i, j に対して,

$$10^i - 1 = p \cdot q_i + r_i, \quad 10^j - 1 = p \cdot q_j + r_j$$

⑧ $k=1, 2, \dots, p+1$ に対して, r_k は $10^k - 1$ を p で割ったときの余りである.