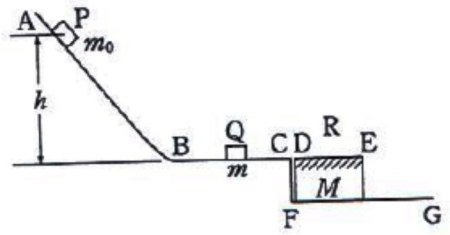


必解 ◇40. 〈衝突後動く台に乗る物体〉

水平面 BC から高さ  $h$  の位置に、質量  $m_0$  の小物体 P が手で押さえられ静止している。傾斜面 AB と水平面 BC とはなめらかにつながっており、水平面 BC 上に、質量  $m$  の小物体 Q が置かれている。その右側の水平面 FG 上に、質量  $M$  の台 R が垂直面 CF に接して置かれている。この台の上面 DE はあらい面をしており、その面は水平面 BC と同一平面にある。このとき、面 DE 以外の面はなめらかな面で摩擦力は作用せず、重力加速度の大きさを  $g$  とする。



(1) Q に衝突する直前の P の速さ  $v$  はいくらか。また、P が Q に衝突したとき、P が点 B に向かってはねかえされるためには、反発係数  $e$  は、どのような条件を満たさなければならないか。

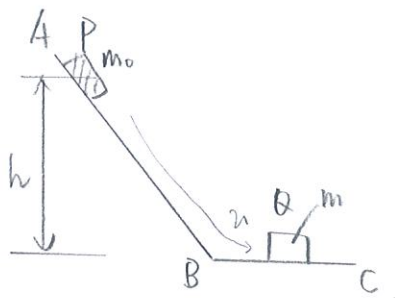
(2) P が Q に衝突したあと、Q だけが速度  $v_0$  で台 R に乗り移り、台 R の上を動く。同時に、台 R もなめらかな水平面 FG 上を動き出す。さらに、小物体 Q はある距離だけ動いて台 R 上で静止した。ただし、小物体 Q は台 R に瞬時に乗り移ったものとし、台 R の上面 DE と小物体 Q との間の動摩擦係数を  $\mu'$  とする。

(a) 小物体 Q および台 R の水平面 FG に対する加速度をそれぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$  とする。加速度  $\alpha$ ,  $\beta$  を  $M$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $\mu'$  を用いて表せ。このとき、加速度の向きは、図の左から右の向きを正とする。

(b) 小物体 Q が台 R に乗り移ってから、台 R に対して静止するまでの時間  $t$  と、台上を進む距離  $d$  を、 $M$ ,  $m$ ,  $v_0$ ,  $g$ ,  $\mu'$  を用いて表せ。

[宇都宮大 改]

40.



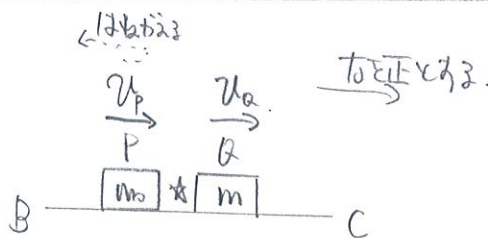
↓2.

(1)  $\frac{1}{2} m_0 u^2 = m_0 g h.$

$$u^2 = 2gh$$

$$u = \sqrt{2gh}$$

"



運動量保存則より

$$m_0 u = m_0 u_p' + m u_a' \quad \text{--- (1)}$$

反発係数

$$e = \frac{u_a' - u_p'}{u} \quad \text{--- (2)}$$

右向きを相対速度の向きと考える。

(2)より  $ue = u_a' - u_p'$   
 $u_a' = ue + u_p'$

①に代入

$$m_0 u = m_0 u_p' + m(ue + u_p')$$

$$m_0 u = m_0 u_p' + m ue + m u_p'$$

$$m_0 u = (m_0 + m) u_p' + m ue$$

$$(m_0 + m) u_p' = m_0 u - m ue$$

$$u_p' = \frac{m_0 u - m ue}{m_0 + m} < 0 \text{ なら}$$

$$\frac{m_0 u - m ue}{m_0 + m} < 0$$

$$m_0 u - m ue < 0$$

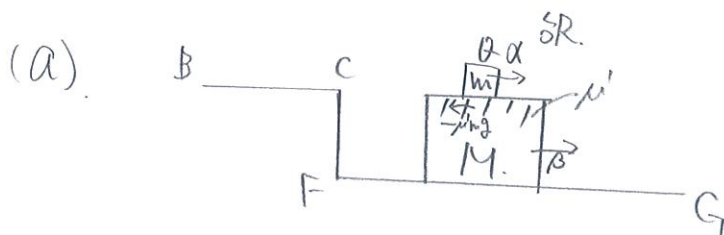
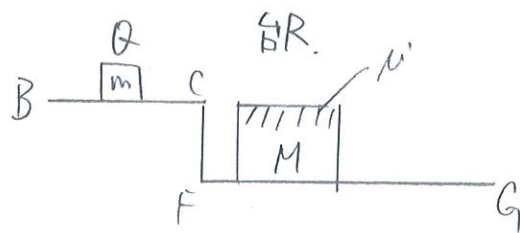
$$u(m_0 - me) < 0$$

$$u \text{ は正なので } m_0 - me < 0$$

$$\text{よって } m_0 < me \rightarrow e > \frac{m_0}{m}$$

$$0 \leq e \leq 1 \text{ なら } \frac{m_0}{m} < e \leq 1$$

40 (2)



$$\frac{1}{2}mv^2$$

$$mav$$

Qが受ける摩擦力は  $\mu'N = \mu'mg$ .

運動方程式より

$$m\alpha = -\mu'mg \quad \text{力は左向き}$$

$$\underline{\alpha = -\mu'g.}$$

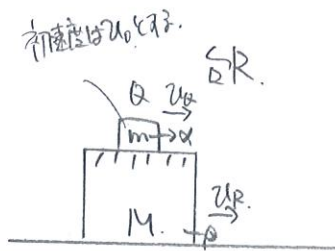
SRが受ける力は、<sup>まはりの</sup>摩擦カと同じで向きが逆.

$$\text{よって } M\beta = \mu'mg.$$

$$\underline{\beta = \frac{\mu'm}{M}g.}$$

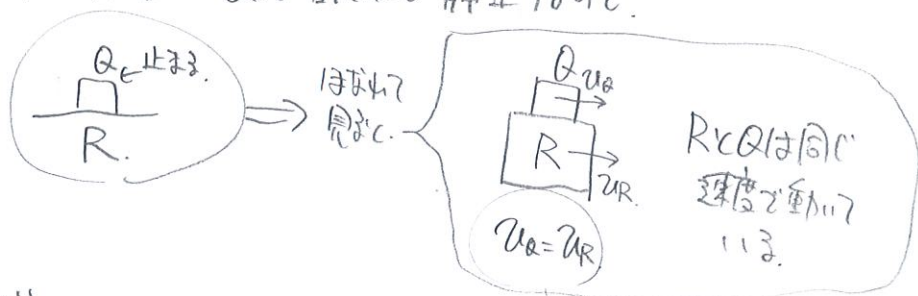
40 (2)

(b) a |



はじめは,  $u_Q > u_R$  台 R の上にある Q の方が少し速いから.

最終的には, Q は台 R 上で静止するので.



速度と加速度の式より.

$$u_Q = u_0 + \alpha t \quad / \quad u_R = 0 + \beta t.$$

より

$$u_0 + \alpha t = \beta t.$$

$$\alpha t - \beta t = -u_0.$$

$$(\alpha - \beta)t = -u_0.$$

$$+(\beta - \alpha)t = +u_0.$$

$$t = \frac{u_0}{\beta - \alpha}$$

= 41: (a) の値を代入して.

$$t = \frac{u_0}{\frac{\mu m}{M}g - (-\mu'g)}.$$

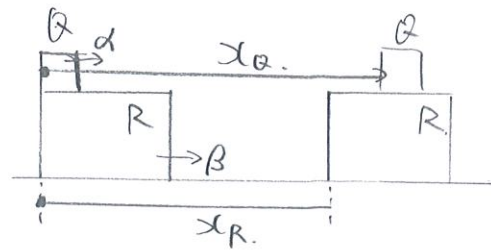
$$= \frac{u_0}{\frac{\mu mg}{M} + \frac{\mu' g M}{M}}.$$

$$= \frac{u_0}{\frac{(m+M)\mu'g}{M}}.$$

$$= \frac{Mu_0}{\mu'g(m+M)}.$$

40 (2)

(b) の 2.



Q が R に 対して 静止 する とき、  
Q と R の 相対 移動 距離 を  $x_Q, x_R$  と する。  
時間 を  $t$  と する。

運動 の 公式 より、

$$x_Q = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad / \quad x_R = 0 + \frac{1}{2} \beta t^2$$

Q が R に 対して 静止 した 距離  $d$  と する。

$$d = x_Q - x_R$$

$$= v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 - \frac{1}{2} \beta t^2$$

$$= v_0 t + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) t^2$$

(b) の 1 と (2) の (a) より  $t, \alpha, \beta$  を 代入 する。

$$\begin{aligned} & \frac{-\mu' M g - \mu' m g}{2M} \\ &= \frac{-\mu' g (m+M)}{2M} \end{aligned}$$

$$= v_0 \left( \frac{M v_0}{\mu' g (m+M)} \right) + \frac{1}{2} \left( -\mu' g - \frac{\mu' m g}{M} \right) \left( \frac{M v_0}{\mu' g (m+M)} \right)^2$$

$$= v_0 \left( \frac{M v_0}{\mu' g (m+M)} \right) - \frac{\mu' g (m+M)}{2M} \times \frac{M v_0}{\mu' g (m+M)} \times \frac{M v_0}{\mu' g (m+M)}$$

$$= \frac{2 M v_0^2}{2 \mu' g (m+M)} - \frac{M v_0^2}{2 \mu' g (m+M)}$$

$$= \frac{M v_0^2}{2 \mu' g (m+M)}$$

//



- (1) 力学的エネルギー保存則より  $\frac{1}{2}mv_0^2 = m_0gh$  よって  $v = \sqrt{2gh}$   
 また、衝突直後のP、Qの速度をそれぞれ  $v_P$ 、 $v_Q$  (右向きを正) とすると、運動量保存則および反発係数の式は
- $$m_0v = m_0v_P + mv_Q$$
- $$e = \frac{v_P - v_Q}{v - 0}$$
- .....①  
 .....②

- ①、②式から  $v_P = \frac{m_0 - em}{m_0 + m}v$   
 Pが左向きにはね返る条件は  $v_P < 0$  よって  $m_0 - em < 0$   
 ゆえに  $e > \frac{m_0}{m}$  これと  $0 \leq e \leq 1$  から  $\frac{m_0}{m} < e \leq 1$  となる  
 (2)(a) Qが受ける水平方向の力は  $\mu' mg$  (左向き) であるから、運動方程式は
- $$ma = -\mu' mg$$
- よって  $a = -\mu' g$   
 台Rが受ける力は  $\mu' mg$  (右向き) であるから

- $M\beta = \mu' mg$  よって  $\beta = \frac{\mu' m}{M}g$   
 (b) 時刻  $t$  でのQ、Rの速度をそれぞれ  $V_Q$ 、 $V_R$  とすると  
 $V_Q = v_0 + at$ 、 $V_R = \beta t$   
 台Rに対して、Qが静止するのは  $V_Q = V_R$  のときであるから
- $$v_0 + at = \beta t$$
- よって  $t = \frac{v_0}{\beta - a} = \frac{v_0}{\frac{\mu' m}{M}g - (-\mu' g)} = \frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)}$  ③

また、時刻  $t$  までの、水平面FGに対するQ、Rの変位(移動距離)をそれぞれ  $x_Q$ 、 $x_R$  とすると

$$x_Q = v_0t + \frac{1}{2}at^2, \quad x_R = \frac{1}{2}\beta t^2$$

QがRに対して進んだ距離  $d$  は

$$d = x_Q - x_R = v_0t + \frac{1}{2}(a - \beta)t^2$$

$$= v_0 \left( \frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)} - \frac{\mu' g(m+M)}{2M} \left( \frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{2\mu' g(m+M)}{Mv_0^2} \approx \text{④}$$

**別解**  $v-t$  グラフの面積は進んだ距離を表す。Q、Rの  $v-t$  グラフをかくと図aのようになり、求める距離  $d$  は図に示した三角形の面積になる。

$$d = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot \frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)} = \frac{Mv_0^2}{2\mu' g(m+M)}$$

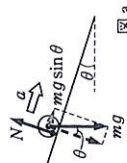
#### 41 (斜面をもつ台上の小球の運動)

- (1)、(2) 台車は動いていない(動けない)。小球が斜面A上を動く距離は  $\frac{h}{\sin \theta}$  である。  
 (3)、(4) 台車と小球には水平方向の外力ははたらかないから、水平方向の運動量は保存する。また、摩擦もはたらかないから、力学的エネルギーも保存している。  
 (4) 力学的エネルギーが保存するので、反発係数が1の衝突と考えてもよい。

(1) 台車は小球から左向きに力を受けるので、台車は動かない。

(a) 小球にはたらく力は、図aのように重力  $mg$  と斜面からの垂直抗力  $N$  である。小球の加速度の大きさを  $a$  とすると、斜面方向の運動方程式は

$$ma = mg \sin \theta \quad \text{よって} \quad a = g \sin \theta$$



図a

|     | P     | Q     |
|-----|-------|-------|
| 質量  | $m_0$ | $m$   |
| 衝突前 | $v$   | 0     |
| 衝突後 | $v_P$ | $v_Q$ |

※A 図  $e \leq 1$  を忘れない。

※B (1)の式の  $v_0$  を  $v_0$  とし、

※C 別解 Q、Rが一体となったあとの速度を  $V$  とすると、運動量保存則より

$$m_0v_0 = (m_0 + M)V$$

よって  $V = \frac{m_0}{m_0 + M}v_0$

台Rについての運動量の変化と力積の関係より

$$MV - 0 = \mu' mg \cdot t$$

よって  $t = \frac{MV}{\mu' mg} = \frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)}$

※D 別解 Rから見たQの相対加速度は

$$a_{QO} = a - \beta = -\mu' g - \frac{\mu' m}{M}g$$

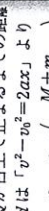
$$= -\frac{M + m}{M}\mu' g$$

Qが台上で止まるまでの距離  $d$  は「 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ 」より

$$0^2 - v_0^2 = 2 \left( -\frac{M + m}{M}\mu' g \right) d$$

よって  $d = \frac{Mv_0^2}{2\mu' g(M + m)}$

図a  $t = \frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)}$



図a

(b) 小球にはたらく垂直抗力の大きさは、斜面垂直方向の力のつりあいより

$$N = mg \cos \theta$$

台車にはたらく力は、重力  $3mg$ 、小球が台車を押す力  $N'$  ( $= mg \cos \theta$ )、壁が台車を押す力  $R$ 、そして床が台車を押す力である。これらを図示すると図bとなる。台車にはたらく力の水平方向の力のつりあいより

$$N' \sin \theta = R$$

よって  $R = N' \sin \theta = mg \cos \theta \sin \theta$  ⑤

よって  $R = N' \sin \theta = mg \cos \theta \sin \theta$  ⑤

(2) 台車は動いていない。  
 (a) 垂直抗力は小球の移動方向に対して垂直にはたらくから、仕事は0である。

(b)  $a = g \sin \theta$  で、 $\frac{h}{\sin \theta}$  だけ運動したから、「 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ 」より

$$0 - v_0^2 = 2 \cdot g \sin \theta \cdot \frac{h}{\sin \theta}$$

求める速さを  $v_1$  とし、 $v_1^2 - 0^2 = 2 \cdot g \sin \theta \cdot \frac{h}{\sin \theta}$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

よって  $v_1 = \sqrt{2gh}$  ⑥

(c) 「 $v = v_0 + at$ 」より、求める時間を  $t_1$  とし、  
 $\sqrt{2gh} = 0 + g \sin \theta \cdot t_1$  よって  $t_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{g \sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}}$  ⑦

(3) 小球は水平面B上を速さ  $v_1$  で右に進む。そして、小球が斜面Cをのり始めると、台車も右に動き出す。

(a) 小球が台車上で一瞬静止(台車と小球は同じ速度)したときの速度を  $v'$  とし、水平方向の運動量の保存を用いると

$$mv_1 + 0 = (m + 3m)v' \quad \text{よって} \quad v' = \frac{1}{4}v_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2gh}$$

(b) 求める高さを  $h'$  とし、力学的エネルギー保存の式は

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}(m + 3m)v'^2 + mgh'$$

よって  $mgh' = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{4m}{2} \cdot \left( \frac{1}{4}v_1 \right)^2 = \frac{1}{2}m(\sqrt{2gh})^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}mgh$

$$\text{ゆえに} \quad h' = \frac{3}{4}h$$

(c) 台車は小球から仕事をされた。小球が台車にした仕事を  $W$  とし、仕事とエネルギーの関係より

$$0 + W = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot v'^2$$

ゆえに  $W = \frac{3}{2}m \cdot \left( \frac{1}{4}\sqrt{2gh} \right)^2 = \frac{3}{16}mgh$

(4) 右向きを正の向きとする。初め、小球が水平面B上を右向きに速度  $v_1$  で進む(台車は静止)。そして、小球が斜面Cを下り終え、水平面B上を床に対して速度  $v$  で進むとき、台車は床に対して速度  $V$  で進むとする。

運動量保存の式と、力学的エネルギー保存の式を立てると

$$mv_1 = mv + 3mV$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot V^2$$

$$\text{①、②式より} \quad v = -\frac{1}{2}v_1, \quad V = \frac{1}{2}v_1$$

(a) 台車の速さは  $\frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2gh}$

(b) 小球の速さは  $\frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2gh}$  ⑧

※A  $N'$  は  $N$  の反作用なので、大きさは  $N$  と等しい。

※B (参考) 床が台車を押す力  $N_c$  は  $N_c = 3mg + N' \cos \theta$  より  $N_c = mg(3 + \cos^2 \theta)$

※C 別解 力学的エネルギー保存則を用いる。水平面を重力による位置エネルギーの基準とすると、小球の速さを  $v_1$  とし、  
 $0 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0$  よって  $v_1 = \sqrt{2gh}$

※D 別解 小球には斜面方向に  $mg \sin \theta$  の力がはたらくから、運動量と力積より  $0 + mg \sin \theta \cdot t_1 = m\sqrt{2gh}$  よって  $t_1 = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}}$

図c

図d

図e

図f

図g

図h

図i

図j

図k

図l

図m

図n

図o

図p

図q

図r

図s

図t

図u

図v

図w

図x

図y

図z